



УДК 528.2, 004:528

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕЙВЛЕТОВ ПРИ СЖАТИИ И ФИЛЬТРАЦИИ ГЕОИНФОРМАЦИИ

А.С.ЯРМОЛЕНКО¹, О.В.СКОБЕНКО²

¹Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Россия

²Белорусская государственная сельскохозяйственная академия, г. Горки, Могилевская область, Республика Беларусь

Целью статьи является разработка детальной и доступной технологии применения вейвлетов в обработке геоинформации, предметом исследований – вейвлет-методы фильтрации и сжатия геоинформации. Методология исследований базируется на современной теории вейвлетов в свете линейной алгебры. Методы исследований – изучение и обобщение, абстрагирование, формализация, математическое моделирование с помощью составленных авторами программ для ЭВМ.

После введения и постановки задачи приведены базовые положения линейной алгебры, на которых основывается содержание статьи при построении ортонормированных базисов в одно- и двумерном случаях. Вначале приводится применение общей теории к разложению вектора исходных данных в базисах Хаара и Шеннона. Далее на основе базиса Хаара строятся ортонормированные базисы вейвлет-преобразований и фильтрации информации. Рассмотрен порядок создания вейвлет-фильтров последовательностью сверток, применение КМА-анализа для построения ортонормированного базиса вейвлет-преобразования. Реализована практическая возможность вейвлет-фильтрации на основе составленных конкретных программ моделирования полей данных геоинформации и изображений, сжатия данных и их фильтрации. Результатом работы являются методики построения ортонормированных базисов различными методами вейвлет-преобразования, на основе которых составлены алгоритмы и соответствующие программы для ЭВМ по сжатию геоинформации на примере рельефа местности и фотоизображений. Исследована эффективность сжатия геоинформации и фильтрации шумов с помощью вейвлетов. Разработана методика определения значения величины фильтра в зависимости от точности исходной геоинформации, проиллюстрированная на примере расчета значения фильтра для сжатия информации о высотах рельефа местности. Такая же методика рекомендована и для фильтрации изображений.

Ключевые слова: базис вейвлет-преобразования; свертка; КМА-анализ; фильтрация; сжатие; точность; программа; изображение; поле данных

Как цитировать эту статью: Ярмоленко А.С. Применение теории вейвлетов при сжатии и фильтрации геоинформации / А.С.Ярмоленко, О.В.Скобенко // Записки Горного института. 2018. Т.234. С. 612-623. DOI: 10.31897/PMI.2018.6.612

Введение и постановка задачи. Сжатие геоинформации и ее фильтрация являются актуальной проблемой теории математической обработки как геодезической информации (измерений), так и изображений. При этом необходимо максимально использовать полученную информацию и получать конечные результаты с достаточной точностью и минимальными затратами при ее хранении, что связано со сжатием информации. Это важно при работе с геоинформацией в геодезии, землеустройстве, природообустройстве, мониторинге земель, при ведении точного сельского хозяйства [20, с.200]. При этом алгоритмы должны обладать простотой и точностью вычислений.

В настоящее время для моделирования объектов сжатия и фильтрации информации широко применяются преобразования Фурье [6, 9-11, 16-19, 23]. Однако даже в своем быстром варианте (быстрое преобразование Фурье – БПФ) оно сопряжено с большим количеством вычислений. В свою очередь в работах [11, 18] отмечается, что в отличие от преобразований Фурье возможны преобразования с другими базисами, восстанавливающие дискретные и непрерывные функции, но значительно сокращающие вычисления. Одним из таких базисов является вейвлетный. В настоящее время он постепенно находит практическое применение [7-15]. Следует при этом отметить, что работы [5-7, 21, 22] носят лишь ознакомительный характер, в основательной работе [21] о применении вейвлетов ничего не сказано, но детально описывается большинство фильтров подавления шумов, которые могут использоваться при моделировании процессов на основе вейвлетного базиса. В трудах [3, 17] приводятся основные теоретические положения по теории вейвлетов, базирующиеся на основе зарубежных исследований. Для создания технологий обработки геоинформации на основе этих работ необходимы дополнительные исследования. В работах [1, 11] выполнены значительные исследования по описанию вейвлетами гравитационного поля Земли. Показано, без детального описания технологии, что применение сжатия информации не всегда эффективно при работе с вейвлетами, хотя при использовании всей информации осуществляется быстрое и полное восстановление поля. В [24, 25] детально



изложена теория лишь первого этапа вейвлет-преобразования, при этом она не доведена до универсального алгоритма. В [14, 15] выдвигается оригинальная идея комбинирования базиса Фурье и вейвлет-базиса при моделировании гравитационного поля Земли (ГПЗ), приводятся существующие вейвлеты, представлена лишь общая схема вейвлет-анализа-синтеза. В [4] в вейвлет-преобразовании используются зарубежные пакеты при неизвестном алгоритме.

Перечисленные труды имеют практическое и теоретическое значение при обработке геоинформации, но в них теория вейвлетов не доведена до инженерного уровня их применения. На основе отмеченного в данной статье с целью разработки детальной и доступной технологии применения вейвлетов в обработке геоинформации ставятся и решаются следующие задачи: 1) построение ортонормированных базисов вейвлет-преобразований и фильтрация; 2) создание вейвлет-фильтров; 3) построение фильтров последовательностью сверток; 4) применение КМА-анализа для построения ортонормированного базиса вейвлет-преобразования; 5) вейвлет-фильтрация и сжатие данных на основе составленных конкретных программ моделирования полей данных геоинформации.

Базовые положения. В соответствии с [18] приведем следующие определения. Оператором циклического сдвига последовательности Z [18, с.125] на k -позиций вправо является оператор R_k , осуществляющий создание новой последовательности $R_k Z$ по формуле

$$(R_k Z)(n) = Z(n - k), \quad (1)$$

где n – номер элемента в создаваемой последовательности.

Пусть имеется ряд (вектор значений)

$$Z = (1, 0, 0, 1)^T \quad (2)$$

при $N = 4$. Тогда при $k = 1$ $(R_1 Z)(0) = Z(0 - 1) = Z(-1) = Z(N - 1) = Z(4 - 1) = Z(3) = 1$; $(R_1 Z)(1) = Z(1 - 1) = Z(0) = 1$; $(R_1 Z)(2) = Z(2 - 1) = Z(1) = 0$; $(R_1 Z)(3) = Z(3 - 1) = Z(2) = 0$.

Таким образом получим новую последовательность-вектор

$$R_1 Z = (1, 1, 0, 0)^T. \quad (3)$$

При $k = 4$ получаем снова исходный вектор

$$R_1 Z = (1, 1, 0, 0)^T. \quad (4)$$

Согласно определению 3.7 и теоремы 3.8 [18, с.176] при некоторых заданных векторах U и V , принадлежащих тому же пространству элементов, что и вектор Z , например (2), возможно построение ортонормированного базиса вида

$$B = \{R_{2k} V\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k} U\}_{k=0}^{M-1} = \{V, R_2 V, R_4 V, \dots, R_{N-2} V, U, R_2 U, R_4 U, \dots, R_{N-2} U\}, \quad (5)$$

где U , согласно [18], можно назвать отцовским вейвлетом, а V – материнским; символ \cup – логическое объединение множеств, $M = N/2$.

В данной статье составляющие базиса, построенные по вектору U , будем называть отцовскими, а по вектору V – материнскими.

Ортонормированность (5) возможна тогда лишь [13, с.250-258, лемма 7.1; 18, теорема 3.8], когда система матриц

$$A(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{U}(n) & \hat{V}(n) \\ \hat{U}(n+M) & \hat{V}(n+M) \end{pmatrix} \quad (6)$$

для $n = 0, 1, 2, \dots, M-1$ – унитарна.

Под унитарной понимается такая матрица [18, с.100], для которой

$$A^{-1} = A^*, \quad (7)$$

где A^{-1} – обратная к A матрица, а A^* – сопряженная к A матрица, получаемая комплексно-сопряженной значением от всех элементов матрицы A^T , транспонированной к A . Комплексно-сопряженным к числу $z = x + iy$ есть число $\bar{z} = x - iy$. Для матриц вещественных чисел $A^* = A^T$,



$\hat{U}(n), \hat{V}(n)$ – соответственно преобразования Фурье заданных векторов U и V . Считается, что пара U и V порождает ортонормированный базис. В [18] N -мерное пространство элементов вектора Z обозначено как $l^2(Z_N)$ пространство значений, в том числе и комплексных, на котором определена l^2 -норма [18, с.112]:

$$\|Z\| = \left(\sum_{k=0}^{N-1} |Z(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Множество Z_N индексов последовательностей обозначается как $Z_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ [18, с.111]. Обобщением для двумерного случая является N_1, N_2 -мерное пространство $l^2(Z_{N_1} \cdot Z_{N_2})$. Если принять, что $\{B_0, B_1, \dots, B_{N_1-1}\}$ есть ортонормированный базис [18, с.134] $l^2(Z_{N_1})$ и $\{C_0, C_1, \dots, C_{N_2-1}\}$ есть ортонормированный базис $l^2(Z_{N_2})$, то ортонормированный базис пространства $l^2(Z_{N_1} \cdot Z_{N_2})$ будет $D_{m_1, m_2}(n_1, n_2) = B_{m_1}(n_1)C_{m_2}(n_2)$, где $0 \leq m_1 \leq N_1 - 1; 0 \leq n_1 \leq N_1 - 1; 0 \leq m_2 \leq N_2 - 1, 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$.

Например, при

$$B_{m_1}(n_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; C_{m_2}(n_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

получим

$$D_{m_1, m_2}(n_1, n_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Скалярным произведением (комплексным) векторов z и w называется выражение [18, с.91]

$$\langle z, w \rangle = zw = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j,$$

где \bar{w}_j есть число, комплексно-сопряженное w_j . Сверткой $z * w$ называется вектор с компонентами

$$z * w(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(m-n)w(n).$$

Для использования аппарата свертки в [18, с.172] вводится сопряженное отражение $\tilde{\omega}$ вектора ω :

$$\tilde{\omega}(k-n) = \bar{\omega}(n-k),$$

тогда

$$z * \tilde{\omega}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} Z(n) * \tilde{\omega}(k-n) = \sum_{n=0}^{N-1} Z(n) * \bar{\omega}(n-k).$$

Построение ортонормированных базисов вейвлет-преобразований и фильтрация. В качестве примера построения ортонормированного базиса примем векторы Хаара [13, с.270; 18, с.190]:

$$U = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0 \right)^T; \tag{8}$$

$$V = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0 \right)^T. \tag{9}$$

Поскольку в [18] установлено, что матрицы $A(n)$ (6) для векторов U и V унитарны, то пользуясь правилом (5), построим ортонормированный базис для вейвлет-преобразования вектора Z , например (2). Здесь $N = 4$ и $M = N/2 = 2$.



Тогда в соответствии с (1), (5) на основании (8), (9) можно составить ортонормированный вейвлет-базис:

$$B = (V, R_2V, U, R_2U) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Тогда вейвлет-преобразование на данном этапе будет

$$\hat{Z} = B^* Z. \quad (11)$$

В нашем примере

$$\hat{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

а обратное преобразование, следуя (11), имеет вид

$$Z = B^{-1} \hat{Z} = B^* \hat{Z} = B^T \hat{Z}. \quad (13)$$

В примере это

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь осуществим фильтрацию сигнала, т.е. его разложение по отцовским и материнским составляющим вейвлет-базиса. Согласно [13, с.26; 18, с.99] в пространстве с комплексным скалярным произведением \langle, \rangle и ортонормированным базисом $R = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ для любого v этого пространства справедливо

$$v = \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle u_j. \quad (14)$$

Здесь v соответствует вектору данных Z , а базисные векторы u_j – всем столбцам матрицы (10). После подстановки их в (14) получим

$$Z = Q(Z) + P(Z), \quad (15)$$

где

$$Q(Z) = \frac{1}{2} \left[(1001) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1001) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \left[1^* \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$P(Z) = \frac{1}{2} \left[(1001) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1001) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \left[1^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1^* \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из примера видно, что $Q(Z)$ и $P(Z)$ составляющие сигнала высоких и низких частот соответственно. Следуя [18, с.180], составляющую высоких частот сигнала представим в виде формулы



$$Q(Z) = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} \langle Z, R_{2k}V \rangle R_{2k}V = (\langle Z, R_0V \rangle) R_0V +$$

$$+ (\langle Z, R_2V \rangle) R_2V + \dots + \left(\langle Z, R_{\frac{N}{2}-1}V \rangle \right) R_{\frac{N}{2}-1}V, \quad (16)$$

а составляющую низких частот в виде

$$P(Z) = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} \langle Z, R_{2k}U \rangle R_{2k}U = (\langle Z, R_0U \rangle) R_0U +$$

$$+ (\langle Z, R_2U \rangle) R_2U + \dots + \left(\langle Z, R_{\frac{N}{2}-1}U \rangle \right) R_{\frac{N}{2}-1}U. \quad (17)$$

Примеры фильтров на основе базисов Шеннона с вещественными и комплексными числами. Если воспользоваться составляющими векторов \hat{U} и \hat{V} (преобразований Фурье) в [18, с.179, 181], то при $N = 4$ с использованием обратных преобразований Фурье можно по аналогии с (14)-(17) определить высоко- и низкочастотные составляющие для данных примеров и в этих базисах (табл.1).

Таблица 1

Разложение вектора Z по отцовскому и материнскому вейвлетам в различных базисах

Исходный вектор Z	Базисы		
	Хаара	Шеннона 1	Шеннона 2
$P(Z)$			
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} - \frac{1}{4}i$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$	0
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} + \frac{1}{4}i$	1
$Q(Z)$			
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$	$\frac{1}{2}$
0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$	0
0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$	$-\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$	0

Из сравнения базисов, приведенных в табл.1, а также базисов Мейера, Баттла – Лемарье, Добеши [13, с.207] преимущество следует отдавать базису Хаара по следующим причинам:

- базис Хаара прост в вычислении;
- понятна на его основании и фильтрация сигнала; так, низкочастотная часть на первом этапе равна нулевому коэффициенту преобразования Фурье, высокочастотная – соответствует отклонениям сигнала от его середины;
- в базисах, отличных от Хаара, задаются дополнительные требования к числу N . Например, в базисах Шеннона оно должно быть кратным 4, а в базисе Хаара кратности 2^p при $p = \log_2 N$; числом N определяется и вид базиса Добеши [18].



Построение фильтров последовательностью сверток. В вейвлет-разложениях (16), (17) замечено, что коэффициенты при $R_{2k}V$, $R_{2k}U$ являются соответствующими скалярными произведениями, которые в виде сверток можно записать так [13, 18, 19]:

$$\langle Z, R_{2k}V \rangle = Z^* \tilde{V}(2k), \quad \langle Z, R_{2k}U \rangle = Z^* \tilde{U}(2k).$$

Настоящие выражения являются теоретической основой быстрого вейвлет-преобразования. Тогда фильтр на основе такой свертки строится следующим образом [13, с.279; 18, с.187]: 1) образуются векторы \tilde{U} , \tilde{V} (описаны в конце базовых положений); 2) осуществляются свертки $Z^* \tilde{U}$, $Z^* \tilde{V}$; 3) вводится оператор децимации – удаления составляющих с нечетными номерами $D(Z\tilde{U})$, $D(Z\tilde{V})$; 4) реализуется оператор разрежающей выборки – удваивания размера вектора вставкой нуля между двумя смежными значениями $U(D(Z^* \tilde{U}))$, $U(D(Z^* \tilde{V}))$; 5) осуществляется фильтрация – строится вектор низкочастотной составляющей в виде свертки $P(Z) = U^* U(D(Z^* \tilde{U}))$ и высокочастотной $Q(Z) = V^* U(D(Z^* \tilde{V}))$; 6) восстанавливается сигнал $Z = P(Z) + Q(Z)$.

На этом заканчивается первый этап разложения сигнала на высоко- и низкочастотные составляющие. Число всех этапов определяется по формуле $p = \log_2 N$. Каждый последующий этап состоит из фазы анализа и фазы синтеза. В фазе анализа на этапе n осуществляется: 1) ввод вектора $Z_{n-1}^T * \tilde{U}_{n-1}$ и его децимация $Z_n = D(Z_{n-1}^T * \tilde{U}_{n-1})$; 2) ввод векторов U_n , V_n нормированного базиса размерности $N_1 = N/2^{n-1}$; 3) осуществляются децимация и разреживание сверток $Z_n^T * \tilde{U}_n$, $Z_n^T * \tilde{V}_n$; $UDU_n = UD(Z_n^T \tilde{U}_n)$, $UDV_n = UD(Z_n^T \tilde{V}_n)$; 4) вычисляются высокочастотная и низкочастотная составляющие вектора Z_n : $Q(Z_n) = V_n^* U(D(Z_n * \tilde{V}_n))$; $P(Z_n) = U^* U(D(Z_n * \tilde{U}_n))$.

В фазе синтеза осуществляется: 1) разреживание векторов $Q(Z_n)$, $P(Z_n)$ (при этом разреживание выполняется числом $n - 1$ -раз до достижения размерности исходного сигнала): $U(Q(Z_n))$, $U(P(Z_n))$; 2) операциями свертки получают высоко- и низкочастотную составляющие сигнала на этапе n : $Q_n(Z) = U(Q(Z_n)) * U_1$; $P_n(Z) = U(P(Z_n)) * U_1$.

Окончательный результат анализа синтеза:

$$Z = P_1(Z) + \sum_{i=0}^{p-1} Q_{p-1}(Z).$$

Настоящий алгоритм реализован в специально составленной авторами программе Sub Вейвлет Анализ Синтез ().

Сигнал Z можно представить в виде разложения

$$Z = c_0 b_0 + c_1 b_1 + \dots + c_{N-1} b_{N-1}, \quad (18)$$

по базису B , который представляет собой совокупность ортонормированных базисов [18, с.176, с.185-186] $B = \{b_i\}_{i=0}^{N-1}$. Очевидно, что в этом случае $c_i = (Z b_i^T)$. Задача заключается в том, чтобы определить ортонормированные векторы в разложении (18). В теории вейвлетов [18, с.209-225, определение 3.28] вместо (18) принимается следующая запись:

$$Z = \sum_{k=0}^{(N/2^{h-1})} c_{1,k} \Phi_{-p,k} + \sum_{k=0}^{(N/2^{h-1})} c_{2,k} \Psi_{-p,k} + \sum_{k=0}^{(N/2^{p-1}-1)} c_{3,k} \Psi_{-(p-1),k} + \dots + \sum_{k=0}^{(N/2^{p-(p-1)-1})} c_{N/2,k} \Psi_{-(p-(p-1),k)}. \quad (19)$$

Если принять $p = \log_2 N$, то (19) перепишется в виде

$$Z = c_{1,0} \Phi_{-p,0} + c_{2,0} \Psi_{-p,0} + c_{2,0} \Phi_{-p,1} + \dots + c_{N/2,0} \Psi_{-1,0} + c_{N/2,1} \Psi_{-1,1} + \dots + c_{N/2,N/2-1} \Psi_{-1,N/2-1}. \quad (20)$$

Здесь все векторы базиса B $\psi_{-j,k}$ записаны слева направо по степени детализации вектора Z . В [18] они записаны наоборот справа налево. Построение базисных векторов $\psi_{-j,k}$ осуществляется в следующем порядке [18, с.225]: 1) применяется последовательность вейвлет-фильтров $U_1, V_1; U_2, V_2; \dots; U_p, V_p$; при этом $U_i, V_i \in l_2(Z_{N/2^{i-1}})$, например, исходя из (8), (9) при $l=2$ будет

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; 2) \text{ каждый из базисов } \psi_{-j,k} \text{ строится по формуле [18, с.225]}$$



$$\Psi_{-j,k} = R_{2^j k} f_j,$$

где $f_l = g_{l-1} U^{l-1}(V_l)$, а $g_l = g_{l-1} U^{l-1}(U_l)$ при начальных значениях, равных $f_1 = V_1$, $g_1 = U_1$. В приведенных выражениях оператор $U^{l-1}(V_l)$ означает $l-1$ -кратное разреживание вектора V_l или U_l . Элементы сверток $f_l(n)$, $g_l(n)$ для $n = 0, 1, \dots, N-1$ вычисляются по формулам

$$f_l(n) = \sum_{m=0}^{N-1} (g_{l-1}(m) U^{l-1}(V_l)(n-m)); \quad g_l(n) = \sum_{m=0}^{N-1} (g_{l-1}(m) U^{l-1}(U_l)(n-m)).$$

КМА-анализ для построения ортонормированного базиса вейвлет-преобразования. В фундаментальных работах [13, 18, 19] вейвлет-разложение предполагает наличие масштабирующей и уточняющей функций. В [18, определение 5.30] масштабирующая функция еще называется отцовским вейвлетом. В [13, с.103; 19, с.44] термин «отцовский вейвлет» в определении масштабирующей функции не применяется. В тех же работах [18, с.198; 19, с.39-42, гл.5] уточняющая функция (материнский вейвлет) просто названа вейвлетом.

В системе Хаара в соответствии с [18, (5.49)] отцовский вейвлет записан в виде

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (21)$$

Материнский вейвлет по формуле [18, с.380]

$$\psi(x) = \varphi(2x-1) - \varphi(2x), \quad (22)$$

и, что легко показать, имеет вид

$$\psi(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (23)$$

Отцовский и материнский вейвлеты позволяют построить ортонормированный базис вейвлет-преобразования для представления дискретно-заданной геоинформации с целью ее обработки. Для этого в вейвлет-теории разработан так называемый кратно-масштабный анализ (КМА-анализ). На его основе создается удобный в использовании алгоритм построения ортонормированного базиса вейвлет-преобразования. КМА-анализ базируется на функциях

$$\varphi_{j,k} = 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j} x - k); \quad (24)$$

$$\psi_{j,k} = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j} x - k). \quad (25)$$

Эти формулы приведены в [5, с.113, с.128; 13, с.241; 18, с.368; 19, с.193]. При этом в приведенных работах показателям степени в (24), (25) приписывается как положительный, так и отрицательный знак, как в нашем случае. В случае отрицательной степени график функции растягивается по оси x , а при положительной – сжимается. В работе нас интересует растяжение по оси x , поэтому принята запись степени с отрицательным знаком. При такой записи уточняются значения функций в зависимости от числа ортонормированных векторов базиса вейвлет-разложения, т.е. осуществляется увеличение деталей анализируемой информации или увеличение разрешения. Поэтому в зарубежной литературе [5, с.113] КМА-анализ справедливо называется многоразрешающим анализом (multiresolution analysis). Построение вейвлет-базисов в системе Хаара будем вести на основе (21)-(25) в следующем порядке:

- 1) построение базисного вектора нулевого приближения φ ;
- 2) построение последующих уточняющих базисных векторов.

1. *Построение базисного вектора нулевого приближения.* В основу построения всех базисных векторов положим вейвлет-базис вида [18, (3.67), (3.84)], применяемый нами в разложении (20). Хотя в теории вейвлетов [3, 5, 13, 17-19] допускается возможность построения нескольких



базисных векторов нулевого приближения, в данной работе мы ограничимся лишь одним в соответствии с данным разложением. При этом такое разложение наиболее часто применимо в различных рядах, в том числе и при разложении в ряд Фурье.

В соответствии с разложением (20), принятым здесь за основу, базисный вектор $\varphi_{-p,k}$ единствен, так как k «пробегают» значения от 0 до $((N/2^p) - 1)$ [18, (3.67)]. (В КМА-анализе обозначениям $\varphi_{-p,k}, \psi_{-p,k}$ разложения (20) соответствуют $\varphi_{-p,k}, \psi_{-p,k}$.) Поскольку $N = 2^p$, то $k = 0$. Следовательно, в (24) $j = p, k = 0$. В соответствии с (21) $0 \leq 2^{-p}x - k < 1$, или $k \leq x < (1+k)/2^{-p}$. При $k = 0$ будет $0 \leq x < 1/2^{-p}$ и составляющие этого вектора определяются по формуле

$$\varphi(x) = 2^{-\frac{p}{2}} \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 2^{-p}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (26)$$

Таким образом, на основе (26) получим вектор

$$\varphi_{p,0} = 2^{-\frac{p}{2}} (1, 1, \dots, 1) \quad (27)$$

с количеством одинаковых членов 2^p .

2. *Построение последующих уточняющих базисных векторов.* Последующие уточняющие базисные векторы вычисляются по (25) с учетом (23). Порядок множества непересекающихся базисных векторов [18, (3.67)] $U\{\psi_{-j,k}\}_{k=0}^{(N/2^j)-1}$ определяется значением j . Это значение изменяется от $p - 1$ до 0 с шагом -1 . Тогда число базисных уточняющих векторов порядка j составит величину $N/2^j$. Значение k будет изменяться от 0 до $N/2^j - 1$. Например, для $j = p$ будем иметь следующий уточняющий вектор (единственный): $\psi_{-p,0}$. Для $j = l$ уточняющими векторами порядка l будут: $\psi_{-l,0}; \psi_{-l,1}; \dots; \psi_{-l,(N/2^l)-1}$. Так, при $N = 8, p = 3$ уточняющими векторами порядка $l = 1$ при верхнем пределе k , равном $N/2^j - 1 = 2^p/2 - 1 = 3$, будут: $\psi_{-1,0}; \psi_{-1,1}; \psi_{-1,2}; \psi_{-1,3}$. Каждый из этих векторов при определенном k также определяется по (25) с учетом материнского вейвлета (23). Тогда можно записать

$$\psi_{l,k} = 2^{-\frac{l}{2}} \begin{cases} -1, & 0 \leq 2^{-l}x - k < \frac{1}{2}; \\ 1, & \frac{1}{2} \leq 2^{-l}x - k < 1; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{или} \quad \psi_{l,k} = 2^{-\frac{l}{2}} \begin{cases} -1, & k2^l \leq x < \left(\frac{1}{2} + k\right)2^l; \\ 1, & \left(\frac{1}{2} + k\right)2^l \leq x < (1+k)2^l; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (28)$$

В качестве примера возьмем $p = 3, l = 1, k = 2$.

Тогда

$$\psi_{1,2} = \frac{1}{2} \begin{cases} -1, & 4 \leq x < 5; \\ 1, & 5 \leq x < 6; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В табл.2 дан пример вейвлет-разложения как методом сверток, так и КМА-методом.

Таблица 2

Разложение вектора Z по составляющим φ и ψ

Исходный вектор	Составляющие							
	$c_{1,0} \cdot \varphi_{-3,0}$	$c_{1,0} \cdot \psi_{-3,0}$	$c_{1,0} \cdot \psi_{-3,0}$	$c_{3,1} \cdot \psi_{-2,1}$	$c_{4,0} \cdot \psi_{-1,0}$	$c_{4,1} \cdot \psi_{-1,1}$	$c_{4,2} \cdot \psi_{-1,2}$	$c_{4,3} \cdot \psi_{-1,3}$
4	7,25	-3,25	-1	0	1	0	0	0
2	7,25	-3,25	-1	0	-1	0	0	0
3	7,25	-3,25	1	0	0	-2	0	0
7	7,25	-3,25	1	0	0	2	0	0
10	7,25	3,25	0	-1,5	0	0	1	0
8	7,25	3,25	0	-1,5	0	0	-1	0
10	7,25	3,25	0	1,5	0	0	0	-2
14	7,25	3,25	0	1,5	0	0	0	2



Каждая составляющая вычислялась по формуле:
для низкочастотной части

$$P_{i,j} = 1/2^{p-j} \sum_{i=1}^{N/2^{p-j}} P_{i,j-1}$$

и высокочастотной

$$Q_{i,j} = P_{i,j-1} - P_{i,j}.$$

Здесь j – номер этапа; i – номер составляющей сигнала в группе (группа состоит соответственно из 2, 4, ... 2^p -элементов в зависимости от порядкового номера этапа): p – число этапов. Окончательный результат: $Z = P_1 + \sum_{i=0}^{p-1} Q_{p-i}$, где P_1 – составляющая нулевой частоты (вектор $\psi_{-3,0}$ в примере табл.1); Q_{p-i} – уточняющие составляющие. В приведенных преобразованиях на каждом этапе при целом p возможен остаток элементов, число которых меньше числа 2^{ip} при $ip = 1, 2, \dots, 2p$. По этому остатку находится также среднее значение TZ , которое записывается в старшей строке p_{ip} на место этого остатка элементов. В последней строке, следующей сразу после строки с номером целой части p , обозначаемой через pf , находится среднее по всем элементам предыдущей строки P_{pf} . Это среднее является одним и тем же для строки $P_{pf} + 1$. Подстрока $q_{pf} + 1$ вычисляется в общем порядке:

$$q_{pf+1} = P_{pf} - P_{pf} + 1.$$

Исследование эффективности сжатия геоинформации и фильтрации шумов с помощью вейвлетов. В основу исследований положены специально составленные авторами программы на языках VISUAL BASIC Excel (VBE) и IDL системы ENVI по сжатию и фильтрации геоинформации. В качестве первого объекта исследований принята модель рельефа, приведенная в [23]. В VBE-программе Sub МакросВЕЙВЛсИстОщ() истинные высоты точек представлены массивом $cc1()$, а высоты, отягощенные случайными ошибками, – массивом $cm()$. Так же, как и в [23], связь настоящих массивов определяется формулой $cm(i) = cc1(i) + delta$, где i изменяется от 0 до $N - 1$, а $delta = Randbetwen(-t, +t)Std$ – функция языка VBE-генерирования случайного числа в интервале значений квантиля от $-t$ до $+t$; Std – задаваемый стандарт случайных ошибок (шумов). Именно высоты массива $cm()$ подвержены вейвлет-разложению по частотам. При вейвлет-сжатии и соответственно фильтрации оставались самые большие по амплитуде члены разложения на всех частотах. Фильтрационный вектор представлен массивом $Filt = Array(1; 0,8; 0,6; 0,5; 0,25; 0,15; 0,1; 0)$. Например, при значении фильтра $Filter = Filt(1) = 0,8$ на всех частотах разложения оставались значения более 0,8, остальные значения обнулялись. На выходе формировался отфильтрованный массив высот $Tw()$. Среднее квадратическое отклонение (СКО) отфильтрованных высот определялось по формуле

$$СКО = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Tw(i) - cc(i))^2}{N}}.$$

Таблица 3

Средние квадратические отклонения (СКО) по каждому фильтру (в метрах) в зависимости от стандартов (Std) распределения случайных ошибок высот

Filter	Оставшаяся информация, %	Значения Std				
		0,05	0,1	0,3	0,4	0,5
1	25	0,66	0,88	0,71	0,93	0,94
0,8	33	0,55	0,35	0,63	0,86	0,88
0,6	40	0,23	0,26	0,63	0,86	0,94
0,5	48	0,23	0,26	0,64	0,86	0,94
0,25	51	0,19	0,24	0,63	0,86	0,99
0,15	66	0,15	0,20	0,64	0,86	0,99
0,1	70	0,11	0,17	0,63	0,86	0,99
0	100	0,09	0,18	0,63	0,86	0,99

В табл.3 приведены значения СКО в зависимости от значения фильтра – Filter и точности отмоделированных высот – величины Std. Оставшаяся информация (в процентах) вычислена как процентное отношение числа наибольших оставшихся коэффициентов к их общему числу до сжатия, равному 15.

Влияние систематической части вейвлет-сжатия на точность конечного результата после обнуления деталей приведено ниже.

СКО по каждому фильтру при высотах, неотягощенных случайными ошибками:

Filter	0,55	0,34	0,25	0,23	0,15	0,10	0,06	0
СКО	1	0,8	0,6	0,5	0,25	0,15	0,1	0

Из экспериментальных исследований следует:

- для сохранения максимально высокой точности исходных высот при их вейвлет-разложении сжатие информации недопустимо; даже при отсутствии сжатия (Filter = 0) и наличии случайных ошибок среднее квадратическое отклонение результирующих высот больше их стандартного отклонения на входе;

- сжатие информации можно допускать, но при этом следует учитывать порог понижения точности изображения рельефа; например, при трехкратном сжатии (Filter = 0,8) и Std = 0,1 среднее квадратическое отклонение высот на выходе СКО = 0,35 больше Std в 3,5 раза, в остальных случаях оно больше в 2 раза. На рис.1 показан рельеф, построенный по истинным высотам, а на рис.2 – рельеф, полученный при трехкратном вейвлет-сжатии (Filter = 0,8) и стандарте ошибок высот 0,3 м (Std = 0,3 м);

- закономерности влияния вейвлет-сжатия на точность получаемой на выходе информации такие же, как и при фильтрации информации в рядах Фурье [23], но здесь объем вычислений ничтожно мал по сравнению с преобразованиями Фурье.

Методика расчета значения фильтра для сжатия информации о высотах рельефа может быть принята следующей:

1. По известной методике определяется оценка стандарта высот рельефа (Std) в виде средней квадратической ошибки съемки рельефа.

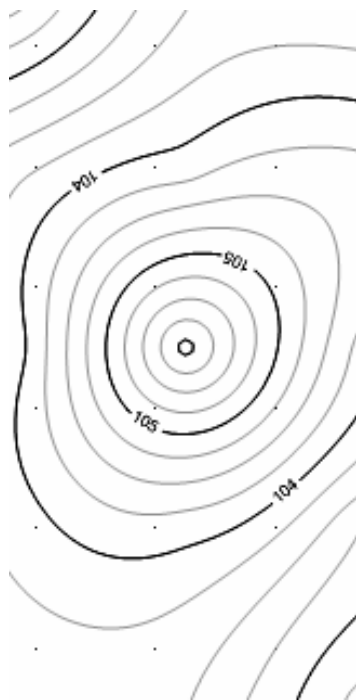


Рис.1.Рельеф в горизонталях, построенный по высотам, принятым в качестве исходных [23] (сечение рельефа 0,25 м)

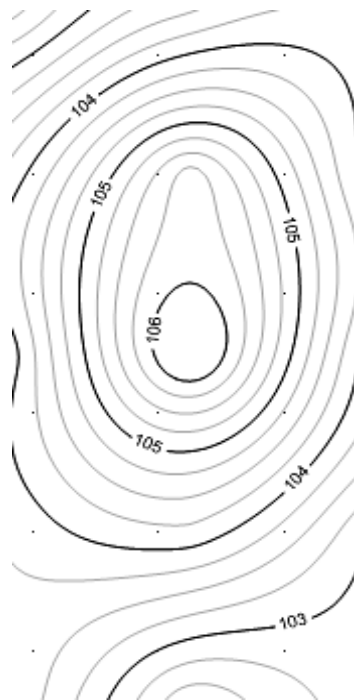


Рис.2.Отфильтрованный рельеф при трехкратном вейвлет-сжатии информации (Filter = 0,8, Std = 0,3 м)

2. Для данного объекта определяются средние квадратические отклонения по каждому фильтру.

3. Если значение средней ошибки рельефа, полученное как $0,8Std$ [2], меньше трети высоты сечения рельефа, то по полученной экспериментально можно выбрать порог (величину СКО) понижения точности сжатой информации о рельефе при определенном значении фильтра (Filter). Если средняя ошибка рельефа больше трети высоты сечения рельефа и приближается к величине СКО, получаемой при 25-30 %-ном сжатии информации (т.е. трех- и четырехкратном сжатии), то в таком случае значение порога (величины СКО) понижения точности сжатой информации о рельефе не суть важно.

Одновременно авторами составлена программа *pro oroi_data_corr24bitWAVE* на алгоритмическом языке IDL системы ENVI вейвлет-

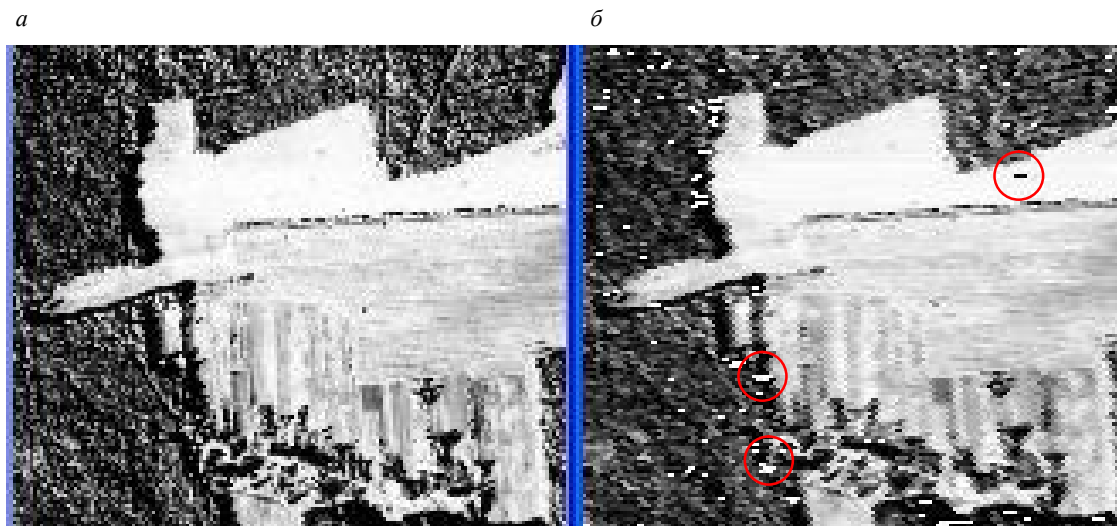


Рис.3. Изображения – исходное (восстановленное по всем вейвлет-элементам) (а) и сжатое в 2,5 раза (б) с отфильтрованными значениями (менее 4 единиц) составляющих вейвлет-разложения по модулю

фильтрации (сжатия) изображений. На рис.3 приведены изображения – исходное (и восстановленное по всем вейвлет-элементам) и сжатое в 2,5 раза с отфильтрованными значениями (менее 4 единиц) составляющих вейвлет-разложения по модулю.

Кружками отмечены несовпадения с оригиналом. При большем сжатии различных несовпадений кружки больше и представляют собой уже шумы, при которых изображение непригодно к использованию. Таким образом, при сжатии изображения рекомендуется также подобрать вначале фильтр в соответствии с пунктами 1-3 в случае рельефа, или при котором отсутствуют видимые несовпадения. И лишь при нем осуществлять вейвлет-сжатие.

Выводы

1. Вейвлет-фильтрация и сжатие приводят к потере части информации. Однако такая фильтрация и сжатие весьма эффективны при известном допустимом пороге (величине СКО) понижении точности сжатой информации. При этом объем вычислений ничтожно мал по сравнению с фильтрацией и сжатием в рядах Фурье и косинусно-синусных преобразованиях JPEG-сжатия.

2. При фильтрации и сжатии изображений рекомендуется подобрать вначале фильтр в соответствии с пунктами 1-3 в случае рельефа. При этом необходимо задавать СКО значения пиксела, при котором допустимо сжатие и отсутствуют видимые несовпадения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багров А.А. Разложение сферических функций по вейвлетам Хаара / А.А.Багров, А.С.Багрова // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2008. № 4. С. 6-8.
2. Большаков В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений / В.Д.Большаков, П.А.Гайдаев. М.: Недра, 1977. 367 с.
3. Воробьев В.И. Теория и практика вейвлет-преобразования / В.И.Воробьев, В.Г.Грибунин. СПб: ВУС. 1999. 204 с.
4. Гонжа Е.А. О вейвлет-фильтрации цифрового изображения земной поверхности // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2017. № 3. С. 105-110.
5. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. М.: Солон-Р, 2002. 448 с.
6. Журкин И.Г. Автоматизированная обработка данных дистанционного зондирования / И.Г.Журкин, Н.К.Шавенько. М.: Диона, 2013. 456 с.
7. Красильников Н.П. Цифровая обработка 2D- и 3D-изображений. СПб: БХВ-Петербург, 2011. 608 с.
8. Латишин А.Ю. Разработка и исследование методики вычисления гравиметрической высоты квазигеоида и составляющих уклонения отвеса на основе вейвлет-преобразования: Автореф. дис. ... канд. техн. наук / Московский университет геодезии и картографии. М., 2011. 207 с.
9. Мазурова Е.М. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2004. № 3. С. 18-35.



10. Мазурова Е.М. Двумерное и матричное представление быстрого преобразования Фурье // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2004. № 4. С. 3-12.
11. Мазурова Е.М. К вопросу о вычислении аномалии высоты на основе вейвлет-преобразования и быстрого преобразования Фурье в плоской аппроксимации / Е.М.Мазурова, А.С.Багрова // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2008. № 4. С. 6-8.
12. Малинников В.А. Анализ методов формирования мультифрактальной меры, основанных на вейвлет-обработке экспериментальных данных / В.А.Малинников, Д.В.Учаев // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2007. № 6. С. 57-61.
13. Мала С. Вейвлеты в обработке сигналов: Пер с англ. М.: Мир, 2005. 671 с.
14. Нейман Ю.М. Об адаптации глобальной модели геопотенциала к региональным особенностям. Ч.1 / Ю.М.Нейман, Л.С.Сугаипова // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2014. № 3. С. 3-12.
15. Нейман Ю.М. Основы разномасштабной аппроксимации геопотенциала / Ю.М.Нейман, Л.С.Сугаипова. М.: Изд-во МИИГАиК, 2016. 218 с.
16. Пискунов Н.С. Дифференциальные и интегральные исчисления: В 2-х т. М.: Наука. 1978. Т.2. 575 с.
17. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. М.: Изд-во Триумф, 2003. 320 с.
18. Фрейзер М. Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры: Пер. с англ. М.: Бином. Лаборатория знаний. 2008. 487 с.
19. Чуи К. Введение в вейвлеты: Пер. с англ. М.: Мир, 2001. 412 с.
20. Шпarr Д. Точное сельское хозяйство (Precision agriculture) / Д.Шпаар, А.В.Захаренко, В.П.Якушев /Федеральное министерство продовольствия, сельского хозяйства и защиты прав потребителя Германии. Санкт-Петербург – Пушкин. 2009. 398 с.
21. Шовенгердт Р.А. Дистанционное зондирование, модели и методы обработки изображений. М.: Техносфера, 2010. 560 с.
22. Яковлев А.Н. Введение в вейвлет-преобразование. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. 104 с.
23. Ярмоленко А.С. Фильтрация геоинформации в рядах Фурье / А.С.Ярмоленко, О.В.Скобенко // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2016. № 1. С. 107-113.
24. Ярмоленко А.С. Использование вейвлетов в аналитическом представлении дискретных функций графической информации // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2008. № 3. С. 20-30.
25. Ярмоленко А.С. Вейвлет-преобразования в кодировании графической информации // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2010. № 4. С. 18-25

Авторы: **А.С.Ярмоленко**, *д-р техн. наук, профессор, yarمولenko_alex@mail.ru (Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Россия)*, **О.В.Скобенко**, *ассистент, olga-skobenko@mail.ru (Белорусская государственная сельскохозяйственная академия, г. Горки, Могилевская область, Республика Беларусь)*.

Статья поступила в редакцию 19.04.2018.

Статья принята к публикации 21.09.2018.